Osaka University Knowledge Archive

Title	Linear Operationニツイテ（I）
Author(s)	泉, 信一; 北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 89 p.10-p.16
Issue Date	1936-05-15
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74321
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

396 *Linear Operation* ニツイテ(I)

泉　信一（東北大）
北川敏男（阪　大）

本論文ノ目的ハ *translatable* (乃チ *translation*

ト commutative ナ) operation ガ integration ト commutative デアルカドウカヲ論ズルコトデアル。

1. (a,b) ヲ有限區間トスル。$f(x)$ ヲ (a,b) ニ於イテ定義サレタ積分可能ナ函數トシ，$f(x)$ ノ作ル空間ヲ E トスル。$\Lambda f=\Lambda(f(x))$ ヲ E ニ於テ定義サレタ additive デヨツ translatable ナ operation デ，Λf ノ contradomain ハ (a,b) ニ於テ定義サレタ積分可能ナ函數ノ作ル空間 E_1 ニフクマレテルトスル。但シ (a,b) ニ於テ定義サレタ函數ニ periodic continuation ヲシテ $(-\infty,\infty)$ ニ於テ定義サレタ函數ヲ考ヘルモノトスル。

更ニ Λf ハ次ノ條件ヲ滿足スルトスル、乃テ

$\boxed{\text{條件 1°}}$ $f_n(x)\varepsilon E$ $(n=1,2,\text{------})$ ナルトキ，殆ンドスベテノ x ニ對シテ

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

トナル様ナ $f(x)\varepsilon E$ ガ存在スルナラバ，スベテノ x ニ對シテ

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda(f_n(x))=\Lambda(f(x)). \text{ ---------------------}(1)$$

例ヘバ，$E=L(a,b)=(L)$ ニトリ，ソノ元素 f ノ norm ヲ

$$\|f\|=\int_a^b|f(x)|\,dx$$

ニヨツテ定義スル．E_1 ヲ (M) 又ハ (C) ニトリ、ソノ element $g=\Lambda f$ ノ norm ヲ

$$\|g\|=\underset{a\leqq t\leqq b}{l.u.b.}\ g(t)$$

ニヨツテ定義スル。然ルトキ，Λf ガ *linear translatable* ナラバ，條件1°ハ明カニ滿足サレテ居ル。

又EガⅠ(L^P)，(M)，(S)，(C)ノ内ノ一ツノ空間デ，E_1 ガ(M)又ハ(C)ノ一ツナルトキ、*norm* ヲ通常ノ樣ニトレバ *linear transl.* ナ Λf ハ明カニ條件1°ヲ滿足スル。ケレドモ $E_1=(L^P)$ $(P>0)$ トシ、ソノ元素 g ノ *norm* ヲ

$$\|g\|=\sqrt[p]{\int_a^b |g(t)|^p dt}$$

ニトルトキ $\Lambda f=g$ ガ *linear transl.* デアッテモ．必ズシモ條件1°ハ滿足サレナイ。　$E_1=(S)$ ノトキニモ同樣デアル。

2.　$a=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

トオク。

$$\Lambda(f(x))=g(t)$$

トオク。

特ニ $\Lambda(f(x))$ ガ t ノ函数デアルコトヲ明カニスルタメニ

$$\Lambda(f(x))=\Lambda\{t,f(x)\}$$

トモ書ク。Λ ノ *translatable* ナルコトカラ

$$\Lambda(f(x+a))=\Lambda\{t,f(x+a)\}=\Lambda\{t,T_a f(x)\}$$
$$=T_a\Lambda\{t,f(x)\}=g(t+a)$$

Λ ノ *additiv* ナルコトカラ

$$\sum_{i=1}^{n} g(t+\xi_i)(\xi_{i+1}-\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}\Lambda\{t,f(x+\xi_i)\}(\xi_{i+1}-\xi_i)$$

$$=\Lambda\left\{t, \sum_{i=1}^{n} f(x+\xi_i)(\xi_{i+1}-\xi_i)\right\}$$

然ルニ、一方ニ於イテ $f(x)$ 及ビ $g(t)$ ガ可積分デアルカラ Khintchine-Jessen ノ定理[1] ニヨリ、次ノ抄整数列 $\{n_k\}$ 及ビ $\{\xi_k\}$ ヲトルコトガ出来ル。乃チ殆ンドスベテノ x 及ビ t ニ對シテ同時ニ

$$\lim_{n_k\to\infty} \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} f(x+\xi_i)=\int_a^b f(x+\xi)\,d\xi .$$

及ビ

$$\lim_{n_k\to\infty} \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} g(t+\xi_i)=\int_a^b g(t+\xi)\,d\xi$$

從ッテ條件 1° カラ

$$\lim_{n_k\to\infty} \Lambda\left\{t, \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} f(x+\xi_i)\right\}=\Lambda\left\{t, \int_a^b f(x+\xi)\,d\xi\right\}$$

故ニ

$$\int_a^b \Lambda\{t+\xi, f(x)\}\,d\xi=\Lambda\left\{t, \int_a^b f(x+\xi)\,d\xi\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

故ニ次ノ定理ヲ得ル。

定理 1 　條件 1° ヲ満足スル Additive translatable operation Λf ハ integration ト commutative デアル。乃チ (2) ガ成立スル。

3. 次ニ條件 1° ガ次ノ條件ニヨッテオキカヘラレタ場合

---

(1) A. Khintchine, Recueil math., Moscou, 41 (1934) and B. Jessen, Annales of Math., 35 (1934).

ヲ考ヘル．乃チ

$\boxed{\text{條件}2^\circ}$　條件1°ト同ジ假定ノ下ニ(1)ガ殆ンド常ニ成立スルトスル。

然ルトキ定理1ト同樣ニシテ次ノ定理ヲ得ルコトハ勿論デアル。

$\boxed{\text{定理}2}$　條件2°ヲ滿足スル additive translatable operation Λf ハ殆ンド常ニ integration ト commutative デアル、乃チ(2)ガ殆ンドスベテノ t ニ對シテ成立スル。

特ニEE及ビE_1ガ空間(L^p),$(p>0)$,(M)及ビ(C)ノウチノ何レカ一ツデ且ツΛfガ linear translatable ノトキニハ，定理2カラ(2)ガ殆ンドスベテノxニ對シテ成立スル。

4. 次ニ條件1°又ハ2°ノ代リニ次ノ條件ガ滿足サレテルトスル。乃チ

$\boxed{\text{條件}3^\circ}$　$f(x)\varepsilon E$ ニ對シテ

$$|\Lambda\{t, f(x)\}|\leqq G|f(t)|$$

トナル樣ナGガ存在スル。

(c,d)ヲ任意ノ區間トシ

$$C=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{n-1}<x_n=d \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

トオク。任意ノ $f\varepsilon E$ ニ對シテ，殆ンドスベテノxニ對シテ

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x)=f(x),\ |f_m(x)|\leqq|f(x)|\quad (m=1,2,\cdots)\cdots\cdots(4)$$

トナルヤウナ連續函數列$\{f_m(x)\}$ヲ作レ。

今條件3°ガ滿足サレテルトスルトキ

$$g_m(t)=\Lambda\{t, f_m(x)\}$$

トオクナラバ

$$\lim_{m\to\infty} g_m(t)=g(t) \text{ ------------------------ } (5)$$

然ルニ §2 ト同様ニシテ

$$\sum_{i=1}^{n} g_m(t+x_i)(x_{i+1}-x_i)=\Lambda\left\{t, \sum_{i=1}^{n} f_m(x+x_i)(x_{i+1}-x_i)\right\}$$

Holm[1] ニヨリ

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g_m(t+x_i)(x_{i+1}-x_i)=\int_c^d g_m(t+x)\,dx$$

ナルヤウニ (3) ヲトルコトが出来ル。然ルニ又 $f_m(x)$ ノ連続ナコトカラ

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f_m(x+x_i)\cdot(x_{i+1}-x_i)=\int_c^d f_m(x+u)\,du$$

故ニ條件 1° カラ

$$\int_c^d g_m(t+x)\,dx=\Lambda\left\{t, \int_c^d f_m(x+u)\,du\right\}$$

(4) 及ビ (5) カラ、両辺ニ於テ $m\to\infty$ ナラシメルトキ

$$\int_c^d g(t+x)\,dx=\Lambda\left\{t, \int_c^d f(x+u)\,du\right\}$$

乃チ

$$\int_c^d \Lambda\{t, f(x+u)\}\,du=\Lambda\left\{t, \int_c^d f(x+u)\,du\right\} \text{ -------- } (6)$$

故ニ次ノ定理ヲ得ル。

---

(1) H. Hahn, Wiener Berichte, 123, IIa, 1 (1914), pp. 713—743

$\boxed{\text{定理3}}$ 任意ノ additive translatable operation Λ ガ條件3°ヲ満足スルナラバ，Λ ハ任意ノ區間ニ於ケル積分ト commutative デアル、乃チ(6)ガ成立スル。

定理ハ區間 (a, b) ガ $(-\infty, \infty)$ ノトキニモ成立スル．